ÜBERABZÄHLBAR ?
ABZÄHLBARE ANORDNUNG BELIEBIGER MENGEN

(Karl-Heinz Wolff)

Π: = (2, 3, ... π_i, ...) ist die Folge aller der Größe nach angeordneten Primzahlen.

α_i mit i = 1, 2, ... ω sind zugelassene Schriftzeichen, beispielsweise Buchstaben, Ziffern, Symbole, verschiedene Schriftarten, das Spatium, usw.

Ω : = $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\omega\}$ ist die Menge aller zugelassenen Schriftzeichen. Es kann sich z.B. um alle in einer Druckerei zur Verfügung stehenden Zeichen handeln.

${}^L ZF_n := \alpha_{n_1} \alpha_{n_2} \ldots \alpha_{n_L}$ ist eine Zeichenfolge der Länge L, bestehend aus L angeordneten Schriftzeichen $\alpha_k \in \Omega$ mit k = $n_1, n_2, \ldots n_L$.

E(ZF) bedeute, das Element E werde durch die Zeichenfolge ZF eindeutig und widerspruchsfrei beschrieben.

$\{E \mid B_1, B_2, \ldots B_m\}$ ist die Menge aller E, welche die Bedingungen $B_1, B_2, \ldots B_m$ erfüllen.

$(E \mid B_1, B_2, \ldots B_m \mid A)$ ist die Folge aller E, welche die Bedingungen $B_1, B_2, \ldots B_m$ erfüllen und gemäß A abzählbar angeordnet sind.

Abzählbare Anordnung aller Zeichenfolgen in einer Folge (ZF_n) = *ZFA*:

$\forall(ZF = \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \ldots \alpha_{i_L}): \Rightarrow \Pi(ZF) = 2^{i_1} \cdot 3^{i_2} \cdot \ldots \cdot \pi_L^{i_L}$.

ZFA: = $\left(ZF \mid ZF \text{ endlich} \mid \Pi(ZF_1) = 2 \wedge \forall n: \Pi(ZF_n) < \Pi(ZF_{n+1})\right)$.

Definition: $\Pi(E) := \min\limits_{(E(ZF))} \Pi(ZF)$

Abzählbare Anordnung aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1 in einer Folge (r_n) = *RA(0,1)*:

RA(0.1): = $\left(r \mid r \in R, 0 < r < 1, \exists\Pi(r) \mid \Pi(r_1) = \min\limits_{(r)} \Pi(r) \wedge \forall n: \Pi(r_n) < \Pi(r_{n+1}) \wedge \right.$

$\left. \wedge \; r_n = r_{n,1} r_{n,2} \ldots r_{n,n} \ldots\ldots \right)$.

Einwand (EC) nach Cantor:

(EC): = $\exists \boldsymbol{c} \in \{c \mid 0 < c < 1, c \in R, c = 0'c_1 c_2 \ldots c_n \ldots\ldots, \forall n: c_n \neq r_{n,n}\} \Rightarrow \forall n: \boldsymbol{c} \neq r_n \Rightarrow \boldsymbol{c} \notin RA(0,1)$.

Gegeneinwand:

$\exists\textbf{(EC)} \Rightarrow \exists\{\textbf{ZF} \mid \textbf{ZF} \in \textbf{\textit{ZFA}}, \boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}\textbf{(ZF)}\} \neq \{\varnothing\} \Rightarrow \exists\Pi(\textbf{c}) \Rightarrow \exists n: \boldsymbol{c} = r_n \in RA(0,1) \Rightarrow$ **W!**

Abzählbare Anordnung aller Elemente E einer Menge {E} in einer Folge (E_n) = *EA.*

EA: = $\left(E \mid E \in \{E\}, \exists\Pi(E) \mid \Pi(E_1) = \min\limits_{(E)} \Pi(E) \wedge \forall n: \Pi(E_n) < \Pi(E_{n+1})\right)$

Einwand (E*E*) durch Definition eines in *EA* nicht enthaltenen Elementes *E* ∈ {E}.

(E*E*): = $\exists \boldsymbol{E} \in \{E \mid E \in \{E\}, \forall n: E \neq E_n\} \Rightarrow \boldsymbol{E} \notin EA$.

Gegeneinwand:

$\exists\textbf{(E\textit{E})} \Rightarrow \exists\{\textbf{ZF} \mid \textbf{ZF} \in \textbf{\textit{ZFA}}, \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}\textbf{(ZF)}\} \neq \{\varnothing\} \Rightarrow \exists\Pi(E) \Rightarrow \exists n: E = E_n \in EA \Rightarrow$ **W!**

ERLÄUTERUNGEN:

Abzählbare Anordnung aller Zeichenfolgen in einer Folge *ZFA*:

Für jede Zeichenfolge ZF = 0'$\alpha_{i1}\ \alpha_{i2} \ldots \alpha_{iL}$ der Länge L bilden wir das Produkt Π(ZF) aus den Potenzen $\pi_k^{i_k}$ der ersten L Primzahlen, wobei der Exponent i_k der k^{ten} Primzahl π_k den Index des k^{ten} Zeichens α_k bildet. Offenbar gibt es zu jeder endlichen Zeichenfolge ZF genau eine solche Ordnungszahl Π(ZF), welche ZF eindeutig kennzeichnet.

Zur Anordnung aller Zeichenfolgen betrachten wir alle endlichen ZF und beginnen mit der kleinsten möglichen Zahl für Π(ZF), also 2. Die zugehörige Zeichenfolge, es handelt sich offenbar um die Folge „α_1“, ordnen wir als erste Zeichenfolge ZF_1 an. Alle weiteren endlichen Zeichenfolgen ZF_n werden dann nach der Größe von $\Pi(ZF_n)$ angeordnet.

Definition:

Kann ein Element E eindeutig und widerspruchsfrei beschrieben werden, dann gibt es immer mehrere Zeichenfolgen, welche dies tun. So kann man etwa die selbe Beschreibung in verschiedenen Schriftarten vornehmen. Die kleinste Zahl Π(ZF) aller E eindeutig und widerspruchsfrei beschreibenden Zeichenfolgen ZF bezeichnen wir mit Π(E). Im Unterschied zur Anordnung der Zeichenfolgen, die wir unabhängig von einer allfälligen „Bedeutung“ für einen Leser vorgenommen haben, erfordert die Bildung von Π(E) eine Interpretation von ZF.

Abzählbare Anordnung aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1 in einer Folge (r_n) = *RA(0,1).*

Wir betrachten alle reellen Zahlen r zwischen 0 und 1, die durch eine endliche Zeichenfolge eindeutig und widerspruchsfrei beschrieben werden. Eine solche Beschreibung für ein r ist genau dann möglich, wenn eine Zahl Π(r) existiert. Diese reellen Zahlen r ordnen wir nach der Größe von Π(r) in einer Folge *RA(0,1)* an und betrachten sie als unendliche Dezimalzahlen.

Einwand nach Cantor:

Jede Dezimalzahl c zwischen 0 und 1, die sich jeweils in ihrer n^{ten} Dezimalstelle von $r_{n,n}$ unterscheidet, ist von allen r_n verschieden. Sie kann also in der Folge *RA(0,1)* nicht enthalten sein. Ein solches ***c*** kann etwa durch ***c*** = 0'$c_1c_2 \ldots c_n$ ..... mit $c_n = 1$ für $r_{n,n} \neq 1$ und $c_n = 2$ für $r_{n,n} = 1$ beschrieben werden.

Gegeneinwand:

Jede Cantor'sche Dezimalzahl ***c*** kann durch (mindestens) eine Zeichenfolge eindeutig beschrieben werden. Wäre die Beschreibung auch widerspruchsfrei, dann gäbe es eine Zahl $\Pi(\boldsymbol{c})$, deren Größe für ***c*** einen Platz r_n in der Folge *RA(0,1)* sichert. Damit wird die Forderung von Cantor „ $\boldsymbol{c_n} \neq r_{n,n}$“ zu „ $\boldsymbol{c_n} \neq \boldsymbol{c_n}$“. Die n^{te} Dezimalstelle von ***c*** müßte definitionsgemäß (!) von sich selbst verschieden sein und dies ist ein Widerspruch. Die Beschreibung kann daher nicht, wie gefordert, widerspruchsfrei vorgenommen werden.

Abzählbare Anordnung aller Elemente E einer Menge $\{E\}$ in einer Folge (E_n) = *EA.*

Es werden alle Elemente der Menge $\{E\}$ betrachtet, die durch eine endliche Zahlenfolge eindeutig und widerspruchsfrei beschrieben werden. Eine solche Beschreibung für ein E ist genau dann möglich, wenn eine Zahl $\Pi(E)$ existiert. Diese E ordnen wir nach der Größe von $\Pi(E)$ in einer Folge *EA* an.

Einwand durch Definition eines in der Folge nicht enthaltenen Elementes *E* aus $\{E\}$.

Es wird ein in der Folge *EA* nicht enthaltene Element *E* der Menge $\{E\}$ definiert, also durch eine Zeichenfolge eindeutig beschrieben. Für *E* gilt also definitionsgemäß $E \notin EA$.

Gegeneinwand:

Da dem Einwand ein konkret definiertes Element *E* zugrunde liegt, kann das in der Folge *EA* nicht enthaltene Element durch (mindestens) eine Zeichenfolge ZF mit $E = E(\mathrm{ZF})$ eindeutig beschrieben werden. Wäre die Beschreibung auch widerspruchsfrei, dann gäbe es eine Zahl $\Pi(E)$, deren Größe für *E* einen Platz E_n in der Folge *EA* sichert. Damit gilt $E \in EA$ im Widerspruch zur Definition von *E*, in der $E \notin EA$ verlangt wurde. Die Beschreibung kann daher nicht, wie gefordert, widerspruchsfrei vorgenommen werden.

Stichworte: Abzählbare Anordnung, Diagonalverfahren nach Cantor (Kritik), Kontinuum, Kontinuumhypothese, Überabzählbare Mengen (Kritik), Universalanordnung, Cantor's diagonal process, countable arrangement, uncountability (Critic),